Bruchgleichungen • Anwendungen
Übung

1. Addiert man bei Bruch $\frac{17}{33}$ eine natürliche Zahl zum Zähler und subtrahiert dieselbe Zahl im Nenner, so ergibt der Wert des neuen Bruchs 4. Welche Zahl ist gesucht?

2. In einem Bruch ist der Zähler um 1 größer als sein Nenner. Subtrahiert man von diesem Bruch die Zahl $\frac{19}{90}$, so erhält man den Kehrwert des ursprünglichen Bruchs. Wie lautet dieser?

3. Ein moderner 80-Zoll-Bildschirm besitzt eine stattliche Breite von 1778 mm. Seine Breite verhält sich zur Höhe wie 16:9. Berechnen Sie mit diesen Angaben seine Höhe.

4. Walter möchte möglichst schnell zu seiner Stammkneipe kommen, die 10 km entfernt ist. Natürlich ist er zu Fuß unterwegs. Die ersten vier Kilometer joggt er, danach geht ihm die Puste aus und er geht den Rest. Berechnen Sie seine Geschwindigkeit v beim Gehen, wenn er beim Joggen doppelt so schnell ist und insgesamt genau zwei Stunden bis zu seiner Kneipe benötigt. [Hinweis: Den Zusammenhang Geschwindigkeit $= \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}}$ sollten Sie kennen und umstellen können.]

5. Der Ersatzwiderstand zweier Widerstände in einem Schaltkreis, die parallel geschaltet sind, erhält man durch $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

   a) Berechnen Sie den Ersatzwiderstand in einer Schaltung aus zwei Parallelen Widerständen $R_1 = 40\ \Omega$ und $R_2 = 60\ \Omega$.

   b) Welchen Widerstand muss man parallel zu $R_1 = 100\ \Omega$ schalten, um einen Gesamtwiderstand von $R_{ges} = 20\ \Omega$ zu erhalten?

   c) Zeigen Sie, dass gilt: $R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

6. Ein Becken kann durch zwei unabhängige Röhren befüllt werden. Sind beide geöffnet, so dauert die Füllung 18 Minuten. Die zweite Röhre würde allein 15 Minuten mehr benötigen als die erste. Wie viele Stunden braucht jede Röhre für sich?

7. Ein Behälter kann durch zwei verschiedene Röhren getrennt befüllt werden. Die erste Röhre füllt ihn in 20, die zweite in 30 Minuten. Wie lange dauert es, bis er vollständig gefüllt ist, wenn beide Zuflussröhren gleichzeitig in Betrieb sind? •••

8. Ein Geschäftsmann hat einen wichtigen Termin, den er über die Autobahn erreichen möchte. Da der Termin sehr wichtig ist, hat er diesen schon mehrere Monate vorher vereinbart und fährt so los, dass er mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ genau pünktlich erscheint. Wegen mehrerer Baustellen und Staus allerdings schafft er auf der ersten Hälfte der Strecke nur einen Schnitt von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie schnell muss er auf der zweiten Hälfte durchschnittlich fahren, um trotzdem pünktlich zu seinem Termin zu erscheinen?

9. Zwei Läufer haben unterschiedliche Geschwindigkeiten. Läufer Eins benötigt für eine 28 km lange Strecke eine halbe Stunde mehr als Läufer Zwei für 18 km. Außerdem besitzt Läufer Eins eine um $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ höhere Geschwindigkeit. Berechnen Sie die Laufzeit von Läufer Eins.

Bruchgleichungen • Anwendungen
Lösung

1. Die Gleichung $\frac{17+x}{33-x} = 4$ besitzt die Definitionsmenge $D = \mathbb{N} \setminus \{33\}$ und die Lösung $x_1 = 23$. Die gesuchte Zahl ist damit 23. Auf die Lösung könnte man auch mit etwas Probieren kommen.

2. Ist n der Nenner des Bruchs, dann lautet der Bruch $\frac{n+1}{n}$ und die entstehende Gleichung $\frac{n+1}{n} - \frac{19}{90} = \frac{n}{n+1}$. Nach Umformung erhalten wir $19n^2 - 161n - 90 = 0$ mit den Lösungen $n_2 = -\frac{10}{19}$ und $n_2 = 9$. Davon ist nur die zweite Lösung sinnvoll, der Bruch lautet $\frac{10}{9}$.

3. $\frac{1778}{h} = \frac{16}{9}$; $h = 1778 \cdot \frac{9}{16} \approx 1\,000$ (mm).
   Seine Höhe beträgt fast exakt 1 000 mm, also einen Meter.

4. Der Zusammenhang $v = \frac{s}{t}$ wird umgestellt nach $t = \frac{s}{v}$.
   Damit ergibt sich die Gleichung $\frac{4}{2v} + \frac{6}{v} = 2$ mit der Lösung $v = 4$.
   Er hat beim Gehen eine Geschwindigkeit von $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

5.
   a) $R_{ges} = 24\ \Omega$

   b) $R_2 = 25\ \Omega$

   c) $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2}{R_1R_2} + \frac{R_1}{R_1R_2} = \frac{R_2+R_1}{R_1R_2}$.
   Der Kehrbruch beider Ausdrücke liefert das Ergebnis.

6. Ist x die Dauer in Minuten, die die erste Röhre allein benötigt, dann benötigt die zweite Röhre allein $x + 15$ Minuten. Die beiden Werte können offenbar nicht addiert werden, sondern eher die „Füllgeschwindigkeiten". Es ergibt sich die Bruchgleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18}$. Umgeformt erhalten Sie die quadratische Gleichung $x^2 - 21x - 270 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_1 = -9$ und $x_2 = 30$. Davon ist lediglich die zweite Lösung sinnvoll. Die beiden Röhren benötigen allein 30 Minuten bzw. 45 Minuten, um das Becken zu füllen.

7. $\frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$; Multiplikation mit dem Hauptnenner 60 liefert
   $3t + 2t = 60$ bzw. $t = 12$.
   Es dauert bei beiden Röhren zusammen also 12 Minuten, bis der Behälter voll ist.

8. Wenn Sie wie die meisten dachten, dass $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ die richtige Antwort gewesen wäre, dann liegen Sie leider falsch. Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist die Gesamtstrecke geteilt durch die gesamte dafür benötigte Zeit, so dass wir zuerst aus $v = \frac{s}{t}$ die Gesamtzeit für die Strecke berechnen müssen: $t_{ges} = t_1 + t_2$.
Damit gilt mit $t = \frac{s}{v}$ die Beziehung $\frac{s}{80} = \frac{0{,}5s}{60} + \frac{0{,}5s}{v_2}$.
Dass die Strecke s hier nicht ausschlaggebend ist, merkt man daran, dass s sich herauskürzen lässt. Ebenso kann die Gleichung mit 2 multipliziert werden: $\frac{2}{80} = \frac{1}{60} + \frac{1}{v_2}$;
$\frac{1}{40} = \frac{v_2}{60v_2} + \frac{60}{60v_2}$ bzw. $\frac{1}{40} = \frac{v_2+60}{60v_2}$.
Aufgelöst erhält man $60v_2 = 40(v_2 + 60) \Leftrightarrow 20v_2 = 2400$.
Die gesuchte Geschwindigkeit beträgt damit $v_2 = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

9. t soll die Laufzeit von Läufer Eins sein, dann ist $(t - 0{,}5)$ die Laufzeit von Läufer Zwei, jeweils in Stunden. Die Geschwindigkeiten sind $\frac{28}{t}$ bzw. $\frac{18}{t-0{,}5}$.
Mit der Zusatzbedingung erhalten wir die Gleichung $\frac{28}{t} - 2 = \frac{18}{t-0{,}5}$.
Nach Multiplikation mit den Nennern entsteht die quadratische Gleichung $-2t^2 + 11t - 14 = 0$, welche die Lösungen $t_1 = 2$ und $t_2 = 3{,}5$ besitzt. Die Laufzeit von Läufer Eins kann damit entweder 2 Stunden betragen oder 3,5 Stunden.